TITLE:

Bombieri-Davenport定理の改良について (整数論)

AUTHOR(S):

本橋, 洋一

CITATION:

本橋, 洋一. Bombieri-Davenport定理の改良について (整数論). 数理解析研究所講究録 1977, 294: 181-191

ISSUE DATE:

1977-04

URL:

http://hdl.handle.net/2433/106198

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅 Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
294巻 1977年 181-191

Bombieri-Davenport 定理の改良について(*)

日本大学　本橋洋一

本報告集にある私の論説[M_4]において，Bombieri-Davenport 定理[M_4, 定理3]を源とする篩法の発展が，素数分布論において，重要な手段を提供することを我々は見たのであるが，ここでは，より一層深くB-D定理の改良ということに話を限定することにしよう。

B-D定理はよく知られているように，Brun-Titchmarsh(以下B-T)定理をその系としてもたらす。しかるに，B-T定理は[M_1][M_2][G][W]によって，最近，興味ある改良を得てきた。そこで当然のことながら，これらの改良を特別の場合としてもたらすような，B-D定理の改良ということが予想される訳である。

我々は更に一歩すすめて，Selberg の large sieve 不等式

$$(1)\qquad \sum_{\substack{qr\leqq Q\\(q,r)=1}} \frac{q}{\varphi(qr)} \sum_{\chi(\mathrm{mod}\, q)}^{*} \Big|\sum_{M}^{M+N} a_n \chi(n) C_r(n)\Big|^2 \leqq (N+Q^2)\sum_{M}^{M+N} |a_n|^2$$

(*) 速報[M_3]をくわしく解説したものである。

の（特別な場合の）改良を示すことにする。我々の結果は，

定理（Motohashi）

$c_r(n)$ は Ramamujam 和，a_n は任意の複素数とする。このとき $(k,l)=1$ に対して

$$\sum_{\substack{q \leqq Q \\ r \leqq R \\ (q,r)=(qr,k)=1}} \frac{q}{\varphi(qr)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi (\mathrm{mod}\, q)} \Bigl| \sum_{\substack{n \leqq N \\ n \equiv l\, (\mathrm{mod}\, k)}} a_n \chi(n) c_r(n) \Bigr|^2 \leqq \Lambda \sum_{\substack{n \leqq N \\ n \equiv l\, (\mathrm{mod}\, k)}} |a_n|^2$$

$$\Lambda = \frac{N}{k}\left(1 + O((\log N)^{-1})\right) + O_\varepsilon\left(\frac{QR}{\sqrt{k}}(R + kQ^2)(QRkN)^{\varepsilon}\right)$$

とくに $k=1$ としてみると，これは (1) の（特別な場合の）改良となっていることがわかる。（勿論 $R \geqq Q^2$ の条件下であるが，篩の結果としては，R が大きい場合が興味がある訳で，我々の結果はその点で改良となっているのである。） linear sieve への応用としては，

系

$N^{2/5} \geqq kQ^2$ の場合

$$\sum_{\substack{q \leqq Q \\ (q,k)=1}} \sideset{}{^*}\sum_{\chi (\mathrm{mod}\, q)} \Bigl| \sum_{\substack{p \equiv l\, (\mathrm{mod}\, k) \\ p \leqq N}} \chi(p) \Bigr|^2 \leqq (2+\varepsilon) \frac{N}{\varphi(k) \log(N/(\sqrt{k}Q))} \pi(N;k,l).$$

$Q=1$ とすれば明らかにこれは [M_1] における B-T 定理の改良をあたえる。[G] に対応するものも容易に得られるが，結果が複雑になるので，ここでは割愛する。上記の結果の注目すべき点は，$k=1$ のときにすら，すでに，B-D 定理の改良をあたえていることであろう。ちなみに，B-D 定理からは

$$\log(N/Q\sqrt{k}) \quad \text{の代りに} \quad \log(N/Q^2k)$$

が出るのである。

以下，定理の証明に入る。

共役な形式を考えればよい。そこで次のように置く。

$$I(N)=\sum_{\substack{n\leq N\\ n\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)}}\Bigl|\sum_{\substack{q\leq Q\\ r\leq R\\ (q,r)=1\\ (qr,k)=1}}\left(\frac{q}{\varphi(qr)}\right)^{1/2}c_r(n)\sum_{\chi(\mathrm{mod}\,q)}^{*}\chi(n)b(r,\chi)\Bigr|^2$$

ここに $b(r,\chi)$ は任意の複素数。しかし，計算をすすめるには，$I(N)$ の Riesz 平均

$$I_1(N)=\int_1^N I(y)\,dy/y$$

を考察する方が楽である。それは $I_1(N)$ が次のような'解析的'な表現をもつからである。

$$I_1(N)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)}\sum_{n\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)}\frac{1}{n^s}\Bigl|\sum_{\substack{q\leq Q\\ r\leq R\\ (q,r)=1\\ (qr,k)=1}}\left(\frac{q}{\varphi(qr)}\right)^{1/2}c_r(n)\sum_{\chi(\mathrm{mod}\,q)}^{*}\chi(n)b(r,\chi)\Bigr|^2\frac{N^s}{s^2}ds$$

$$= \varphi(k)^{-1} \sum_{\xi \,(\mathrm{mod}\, k)} \frac{\bar{\xi}(l)}{2\pi i} \int_{(2)} F(s, \xi) \frac{N^s}{s^2}\, ds.$$

但し ξ は $\mathrm{mod}\, k$ での Dirichlet 指標 で

$$F(s,\xi) = \sum \frac{\xi(n)}{n^s} \Bigg| \sum_{\substack{q \leqq Q \\ r \leqq R \\ (q,r)=1 \\ (qr,k)=1}} \left(\frac{q}{\varphi(qr)}\right)^{1/2} \sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, q)}^{*} \chi(n) C_r(n) b(r,\chi) \Bigg|^2.$$

$F(s,\xi)$を計算する前に次のことを注意しよう。 Ramanujan 和 $C_r(n)$ は，よく知られているように，

$$C_r(n) = \sum_{\substack{d|r \\ d|n}} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d$$

とかける。 よって

$$\sum_{\substack{q \leqq Q \\ r \leqq R \\ (q,r)=1 \\ (qr,k)=1}} \left(\frac{q}{\varphi(qr)}\right)^{1/2} \sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, q)}^{*} \chi(n) C_r(n) b(r,\chi)$$

$$= \sum_{\substack{q \leqq Q \\ (q,k)=1}} \left(\frac{q}{\varphi(q)}\right)^{1/2} \sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, q)}^{*} \chi(n) \sum_{\substack{r \leqq R \\ (qk,r)=1}} \frac{b(r,\chi)}{\sqrt{\varphi(r)}} \sum_{\substack{d|r \\ d|n}} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d$$

$$= \sum_{\substack{q \leqq Q \\ (q,k)=1}} \left(\frac{q}{\varphi(q)}\right)^{1/2} \sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, q)}^{*} \chi(n) \sum_{\substack{d|n \\ d \leqq R \\ (d,qk)=1}} d \sum_{\substack{u \leqq R/d \\ (u,qk)=1}} \mu(u) \frac{b(du,\chi)}{\sqrt{\varphi(du)}}$$

$$= \sum_{\substack{q \leqq Q \\ (q,k)=1}} \left(\frac{q}{\varphi(q)}\right)^{1/2} \sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, q)}^{*} \chi(n) \sum_{\substack{d|n \\ d \leqq R \\ (d,qk)=1}} \lambda(d,\chi)$$

とおく。

$$\lambda(d;\chi) = d \sum_{\substack{u \leqq R/d \\ (u,qk)=1}} \mu(u)\, b(du,\chi)\, \varphi(du)^{-1/2}$$

である。従って，$F(s,\xi)$ の右辺を展開すると，

$$F(s,\xi) = \sum_{\substack{q_1,q_2 \leqq Q \\ (q_1q_2,k)=1}} \left(\frac{q_1q_2}{\varphi(q_1)\varphi(q_2)}\right)^{1/2} \sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi_1 (\mathrm{mod}\ q_1) \\ \chi_2 (\mathrm{mod}\ q_2)}} \sum_{\substack{d_1,d_2 \leqq R \\ (d_1d_2,k)=1 \\ (d_j,q_j)=1 \\ (j=1,2)}} \lambda(d_1,\chi_1)\overline{\lambda(d_2,\chi_2)} \times$$

$$\times \sum_{[d_1,d_2]|m} \frac{\xi\chi_1\overline{\chi}_2(n)}{m^s}$$

ここで，当然，条件 $(d_1d_2,k)=1$，$(d_j,q_j)=1$ $(j=1,2)$ はおとしてもかまわない。よって

$$F(s,\xi) = \sum_{\substack{q_1,q_2 \leqq Q \\ (q_1q_2,k)=1}} \left(\frac{q_1q_2}{\varphi(q_1)\varphi(q_2)}\right)^{1/2} \sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi_1 (\mathrm{mod}\ q_1) \\ \chi_2 (\mathrm{mod}\ q_2)}} L(s,\xi\chi_1\overline{\chi}_2)H(s;\chi_1,\chi_2,\xi)$$

但し

$$H(s;\chi_1,\chi_2,\xi) = \sum_{d_1,d_2 \leqq R} \frac{\xi\chi_1\overline{\chi}_2([d_1,d_2])}{[d_1,d_2]^s} \lambda(d_1,\chi_1)\overline{\lambda(d_2,\chi_2)}$$

更に $H(s;\chi_1,\chi_2,\xi)$ を‘2乗和’の形に変形するのであるが，それには，

$$H(s;\chi_1,\chi_2,\xi) = \sum_{d_1,d_2 \leqq R} \frac{\xi\chi_1\overline{\chi}_2(d_1)\,\xi\chi_1\overline{\chi}_2(d_2)}{(d_1d_2)^s} \lambda(d_1,\chi_1)\overline{\lambda(d_2,\chi_2)} \times$$

$$\times (d_1,d_2)^s\, \xi\overline{\chi}_1\chi_2((d_1,d_2))$$

に注意して,

$$\sum_{\substack{d|d_1 \\ d|d_2}} \xi\chi_1\chi_2(d)\, d^s \prod_{p|d}\left(1-\frac{\xi\chi_1\overline{\chi}_2(p)}{p^s}\right) = (d_1,d_2)^s\, \xi\overline{\chi}_1\, \chi_2((d_1,d_2))$$

であるから,

$$H(s;\chi_1,\chi_2,\xi)$$
$$=\sum_{d\le R}\frac{\xi\chi_1\overline{\chi}_2(d)}{d^s}\prod_{p|d}\left(1-\frac{\xi\chi_1\overline{\chi}_2(p)}{p^s}\right)\times$$
$$\times\left(\sum_{u\le R/d}u^{-s}\lambda(du,\chi_1)\chi_1\overline{\chi}_2\xi(u)\right)\left(\sum_{v\le R/d}v^{-s}\,\overline{\lambda(dv,\chi_2)}\,\chi_1\overline{\chi}_2\xi(v)\right)$$

を得る。以上から

$$I_1(N)=\varphi(k)^{-1}\sum_{\xi\,(\mathrm{mod}\,k)}\xi(l)\sum_{\substack{q_1,q_2\le Q\\(q_1q_2,k)=1}}\left(\frac{q_1q_2}{\varphi(q_1)\varphi(q_2)}\right)^{1/2}\times$$
$$\times\sum_{\substack{\chi_1\,(\mathrm{mod}\,q_1)\\\chi_2\,(\mathrm{mod}\,q_2)}}^{*}\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)}L(s,\chi_1\overline{\chi}_2\xi)H(s;\chi_1,\chi_2,\xi)\frac{N^s}{s^2}ds$$

積分路を $\mathrm{Re}(s)=(\log N)^{-1}$ (N:充分大)に移動するのであるが,この際に $L(s,\chi_1\overline{\chi}_2\xi)$ が $s=1$ で極をもつのは,

$\chi_1=\chi_2$, ξ :単指標 の場合にかぎられる

ことに注意する。これは χ_1,χ_2 が原始指標で,しかもその法が k と互に素であるから言えるのである。こうして,上記の場合, $\mathrm{Res}_{s=1}\,L(s,\chi_1\overline{\chi}_2\xi)=\varphi(qk)/qk$ $(q=q_1=q_2)$ であるから

$$I_1(N) = \frac{N}{k} \sum_{\substack{q \leqq Q \\ (q,k)=1}} \sideset{}{^*}\sum_{\chi (\mathrm{mod}\, q)} H(1\,;\chi,\chi,\xi_0) \qquad (\xi_0 : 単位指標)$$

$$+ \; O\left(\frac{(kQ)^{\varepsilon}}{k} P (\log N)^2 \right)$$

但し
$$P = \sum_{\xi (\mathrm{mod}\, k)} \sum_{\substack{q_1, q_2 \leqq Q \\ (q_1 q_2, k)=1}} \sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi_1 (\mathrm{mod}\, q_1) \\ \chi_2 (\mathrm{mod}\, q_2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} |L(\sigma_0+it, \chi_1 \overline{\chi_2} \xi)||H(\sigma_0+it; \chi_1, \chi_2, \xi)| \frac{dt}{|t|^2+1}$$

$$(\sigma_0 = (\log N)^{-1})$$

さて， $\chi \ (\mathrm{mod}\ q)$ として，

$$H(1\,; \chi, \chi, \xi_0)$$

$$= \sum_{\substack{d \leqq R \\ (d,qk)=1}} \frac{1}{d} \prod_{p|d} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left\{ \sum_{\substack{u \leqq R/d \\ (u,qk)=1}} \frac{\lambda(du, \chi)}{u} \right\} \left\{ \sum_{\substack{v \leqq R/d \\ (v,qk)=1}} \frac{\overline{\lambda(dv, \chi)}}{v} \right\}$$

一方 $\lambda(du,\chi)$ の定義から

$$\sum_{\substack{u \leqq R/d \\ (u,qk)=1}} \frac{\lambda(du,\chi)}{u} = d \sum_{\substack{u \leqq R/d \\ (u,qk)=1}} \sum_{\substack{w \leqq R/du \\ (w,qk)=1}} \mu(w) b(duw, \chi) \varphi(duw)^{-1/2}$$

$$= d \sum_{\substack{a \leqq R/d \\ (a,qk)=1}} b(da, \chi) \varphi(da)^{-1/2} \sum_{w|a} \mu(w)$$

$$= d\, b(d,\chi) \varphi(d)^{-1/2}$$

よって
$$H(1; \chi, \chi, \xi_0) = \sum_{\substack{d \leqq R \\ (d,qk)=1}} | b(d,\chi)|^2.$$

すなわち

$$I_1(N) = \frac{N}{k} \sum_{\substack{q \leqq Q \\ r \leqq R \\ (q,r)=(qr,k)=1}} \sideset{}{^*}\sum_{\chi (\mathrm{mod}\, q)} |b(r,\chi)|^2$$

$$+ \quad O\left(\frac{(kQ)^{\varepsilon}}{k} P (\log N)^2\right).$$

次に P を評価しよう。

$$L(\sigma_0 + it, \chi_1 \bar{\chi}_2 \xi) \ll ((|t|+1) q_1 q_2 k)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

であるから

$$P \ll (Q^2 k)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \sum_{\xi (\mathrm{mod}\, k)} \sum_{\substack{q_1, q_2 \leqq Q \\ (q_1 q_2, k)=1}} \sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi_1 (\mathrm{mod}\, q_1) \\ \chi_2 (\mathrm{mod}\, q_2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\sigma_0 + it; \chi_1, \chi_2, \xi)| \frac{dt}{|t|^{\frac{5}{4}}+1}.$$

しかるに

$$\sum_{\xi (\mathrm{mod}\, k)} \sum_{\substack{q_1, q_2 \leqq Q \\ (q_1 q_2, k)=1}} \sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi_1 (\mathrm{mod}\, q_1) \\ \chi_2 (\mathrm{mod}\, q_2)}} |H(\sigma_0 + it; \chi_1, \chi_2, \xi)|$$

$$\ll R^{\varepsilon} \sum_{\substack{d \leqq R \\ (d,k)=1}} \sum_{\xi} \sum_{q_1, q_2} \sideset{}{^*}\sum_{\chi_1, \chi_2} \left| \sum_{u \leqq R/d} \frac{\lambda(du, \chi_1)}{u^s} \chi_1 \bar{\chi}_2 \xi(u) \right| \left| \sum_{v \leqq R/d} \frac{\overline{\lambda(dv, \chi_2)}}{v^s} \chi_1 \bar{\chi}_2 \xi(v) \right|$$

$$(s = \sigma_0 + it)$$

$$\ll R^{\varepsilon} \sum_{\substack{d \leqq R \\ (d,k)=1}} \left\{ \sum_{\substack{q_1 \leqq Q \\ (q_1,k)=1}} \sideset{}{^*}\sum_{\chi_1 (\mathrm{mod}\, q_1)} \sum_{\xi (\mathrm{mod}\, k)} \sum_{\substack{q_2 \leqq Q \\ (q_2,k)=1}} \sideset{}{^*}\sum_{\chi_2 (\mathrm{mod}\, q_2)} \left| \sum_{u \leqq R/d} \frac{\lambda(du, \chi_1)}{u^s} \chi_1 \bar{\chi}_2 \xi(u) \right|^2 \right\}^{1/2}$$

$$\times \left\{ \sum_{\substack{q_2 \leqq Q \\ (q_2,k)=1}} \sideset{}{^*}\sum_{\chi_2 (\mathrm{mod}\, q_2)} \sum_{\xi (\mathrm{mod}\, k)} \sum_{\substack{q_1 \leqq Q \\ (q_1,k)=1}} \sideset{}{^*}\sum_{\chi_1 (\mathrm{mod}\, k_1)} \left| \sum_{v \leqq R/d} \frac{\overline{\lambda(dv, \chi_2)}}{v^s} \bar{\chi}_2 \chi_1 \xi(u) \right|^2 \right\}^{1/2}.$$

さて，乗法的 large sieve 不等式を少し改良して，一般に

$$\sum_{\xi \,(\mathrm{mod}\, k)} \sum_{\substack{q \leqq Q \\ (q,k)=1}} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, q)} \left| \sum_{M}^{M+N} a_n \chi\xi(n) \right|^2$$

$$\leqq (N + kQ^2) \sum_{\substack{M \\ (n,k)=1}}^{M+N} |a_n|^2$$

が言える。これは，ξ を原始指標におきかえて，Gauss 和により $\chi\xi$ をあわせれば，通常の加法的 large sieve の形になり，その際にあらわれる Farey series に相当するものが

$$\frac{a}{qd} \qquad (d \mid k,\ (q,k)=1,\ q \leqq Q,\ (a,qd)=1)$$

となる故，すぐに証明できる。これを上記の2重和の評価に用いると，

$$\sum_{\xi \,(\mathrm{mod}\, k)} \sum_{\substack{q_1, q_2 \leqq Q \\ (q_1 q_2, k)=1}} \sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi_1 (\mathrm{mod}\, q_1) \\ \chi_2 (\mathrm{mod}\, q_2)}} |H(\sigma_0 + it; \chi_1, \chi_2, \xi)|$$

$$\ll R^{\varepsilon} \sum_{\substack{d \leqq R \\ (d,k)=1}} \Biggl\{ \sum_{\substack{q_1 \leqq Q \\ (q_1,k)=1}} \sideset{}{^*}\sum_{\chi_1 (\mathrm{mod}\, q_1)} \left(\frac{R}{d} + kQ^2\right) \sum_{\substack{u \leqq R/d \\ (u, q_1 k)=1}} |\lambda(du, \chi_1)|^2 \Biggr\}^{1/2}$$

$$\times \Biggl\{ \sum_{\substack{q_2 \leqq Q \\ (q_2,k)=1}} \sideset{}{^*}\sum_{\chi_2 (\mathrm{mod}\, q_2)} \left(\frac{R}{d} + kQ^2\right) \sum_{\substack{v \leqq R/d \\ (v, q_2 k)=1}} |\lambda(dv, \chi_2)|^2 \Biggr\}^{1/2}$$

$$\ll R^{\varepsilon} \sum_{\substack{d \leqq R \\ (d,k)=1}} \left(\frac{R}{d} + kQ^2\right) \sum_{\substack{q \leqq Q \\ (q,k)=1}} \sideset{}{^*}\sum_{\chi (\mathrm{mod}\, q)} \sum_{\substack{u \leqq R/d \\ (u, qk)=1}} |\lambda(du, \chi)|^2$$

一方 $\lambda(du,\chi)$ の定義から，$\chi\,(\mathrm{mod}\, q)$ として，

$$\sum_{\substack{u \leqq R/d \\ (u,qk)=1}} |\lambda(du,\chi)|^2$$

$$\leqq \sum_{\substack{u \leqq R/d \\ (u,qk)=1}} (du)^2 \sum_{\substack{w \leqq R/du \\ (dw,qk)=1}} \frac{1}{\varphi(duw)} \sum_{\substack{w \leqq R/du \\ (dw,qk)=1}} |b(duw,\chi)|^2$$

$$\ll d R^{\varepsilon} \sum_{\substack{w \leqq R/du \\ u \leqq R/d \\ (duw,qk)=1}} |b(duw,\chi)|^2 u$$

すなわち，

$$\sum_{\xi (\mathrm{mod}\, k)} \sum_{\substack{q_1, q_2 \leqq Q \\ (q_1 q_2, k)=1}} \sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi_1 (\mathrm{mod}\, q_1) \\ \chi_2 (\mathrm{mod}\, q_2)}} |H(\sigma_0+it; \chi_1, \chi_2, \xi)|$$

$$\ll R^{\varepsilon} \sum_{\substack{q \leqq Q \\ (q,k)=1}} \sideset{}{^*}\sum_{\chi (\mathrm{mod}\, q)} \sum_{\substack{d \leqq R \\ (d,qk)=1}} \sum_{\substack{u \leqq R/d \\ (u,qk)=1}} \sum_{\substack{w \leqq R/du \\ (w,qk)=1}} du \left(\frac{R}{d} + kQ^2\right) |b(duw,\chi)|^2$$

$$\ll R^{1+\varepsilon} (R+kQ^2) \sum_{\substack{q \leqq Q \\ (q,k)=1}} \sideset{}{^*}\sum_{\chi (\mathrm{mod}\, q)} \sum_{\substack{r \leqq R \\ (r,qk)=1}} |b(r,\chi)|^2$$

これよりただちに

$$P \ll (Q^2 k)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} R^{1+\varepsilon} (R+kQ^2) \sum_{\substack{q \leqq Q \\ r \leqq R \\ (q,r)=(qr,k)=1}} \sideset{}{^*}\sum_{\chi (\mathrm{mod}\, q)} |b(r,\chi)|^2.$$

すなわち

$$I_1(N) = \left\{ \frac{N}{k} + O\left(\frac{QR}{\sqrt{k}} (R+kQ^2)(kQRN)^{\varepsilon} \right) \right\} \sum_{\substack{q \leqq Q \\ r \leqq R \\ (q,r)=(qr,k)=1}} \sideset{}{^*}\sum_{\chi (\mathrm{mod}\, q)} |b(r,\chi)|^2.$$

そして，簡単な Tauber 型の議論により，

$$I(N)=\left\{\frac{N}{k}\left(1+O\left((\log N)^{-1}\right)\right)+O\left(\frac{QR}{\sqrt{k}}(R+kQ^2)(kQRN)^{\varepsilon}\right)\right\}\sum_{\substack{q\leq Q\\ r\leq R\\ (q,r)=(qr,k)=1}}\ \sideset{}{^*}\sum_{\chi(\mathrm{mod}\,q)}|b(r,\chi)|^2$$

を得る。これは定理と共役な結果である。

定理の系については，簡単な証明であるので，しょう略する。

参考文献.

[G] M. Goldfeld, A further improvement of the Brun-Titchmarsh theorem. J. London Math. Soc., 11, 434–444 (1975).

[M_1] Y. Motohashi, On some improvements of the Brun-Titchmarsh theorem. J. Math. Soc. Japan, 26, 306–323 (1974).

[M_2] ————, ———— II. 数理研講究録 193, 97–109 (1973).

[M_3] ————, A note on the large sieve. Proc. Japan Acad., 53, 17–19 (1977).

[M_4] ————, 最小素数定理について. 本報告集.

[W] D. Wolke, Eine weitere Möglichkeit zur Verbesserung des Satzes von Brun-Titchmarsh. 手稿.

（1977年3月9日記）